a priori : pour & contre

Avoir une distribution *a priori* :

- 😁 donne de la **flexibilité**
- 😁 permet d'incorporer de la **connaissance extérieure**
- ☹️ ajoute nécessairement de la **subjectivité**

$\Rightarrow$ le choix (élicitation) de la distribution *a priori* est un point sensible !

Propriété de la distribution *a priori*

1. Le support de la loi *a posteriori* doit être inclus dans celui de la distribution *a priori* :

   si $\pi(\theta) = 0$, alors $p(\theta|\boldsymbol{y}) = 0$

2. Les différents paramètres sont indépendants *a priori*

Élicitation de la loi *a priori*

Stratégies pour communiquer avec des experts non-statisticiens
$\Rightarrow$ transformer leurs **connaissances** *a priori* en **distributions** *a priori*

- La **méthode des histogrammes** : demander aux experts de donner des poids à des intervalles de valeurs
  ⚠ peuvent donner une probabilité *a priori* nulle pour des valeurs plausible des paramètres
- Choisir une **famille de distributions paramétriques** $p(\theta|\eta)$ en **accord avec les experts** (e.g. pour certains quantiles ou moments) – permet de résoudre le problème du support, mais l'impact de la famille paramétrique choisie est important
- Éliciter les lois *a priori* à partir de la **littérature** scientifique
- ...

La quête des *a priori* non-informatifs

Parfois, on a **aucune connaissance *a priori***
Quelle loi *a priori* utiliser ?

La quête des *a priori* non-informatifs

Parfois, on a **aucune connaissance *a priori***

$\Rightarrow$ la loi Uniforme, un **a priori non-informatif** ?

La quête des *a priori* non-informatifs

Parfois, on a **aucune connaissance *a priori***
$\Rightarrow$ la loi Uniforme, un **a priori non-informatif** ?

2 difficultés majeures :

1. **Lois impropres** $\int_\Theta \pi(\theta)\mathrm{d}\theta = \infty$

La quête des *a priori* non-informatifs

Parfois, on a **aucune connaissance *a priori***
$\Rightarrow$ la loi Uniforme, un **a priori non-informatif** ?

2 difficultés majeures :

1. **Lois impropres** $\displaystyle\int_\Theta \pi(\theta)\mathrm{d}\theta = \infty$
2. **Lois non-invariantes**

Non invariance de la loi uniforme : détail

Soit $F_X(x) = P(X < x)$

Non invariance de la loi uniforme : détail

Soit $F_X(x) = P(X < x)$

Si $Y = g(X)$, alors

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(g(X) < y) = P(X < g^{-1}(y))$$

Non invariance de la loi uniforme : détail

Soit $F_X(x) = P(X < x)$

Si $Y = g(X)$, alors

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(g(X) < y) = P(X < g^{-1}(y))$$

En dérivant par rapport à y, on obtient :

$$f_Y(y) = \frac{\partial g^{-1}(y)}{\partial y} f_X(g^{-1}(y))$$

Non invariance de la loi uniforme : détail

Soit $F_X(x) = P(X < x)$

Si $Y = g(X)$, alors

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(g(X) < y) = P(X < g^{-1}(y))$$

En dérivant par rapport à y, on obtient :

$$f_Y(y) = \frac{\partial g^{-1}(y)}{\partial y} f_X(g^{-1}(y)) \neq f_X(g^{-1}(y)) = f_X(x)$$

NB : La formule s'étend au cas multidimensionnel où $|J|$ désigne le déterminant de la matrice jacobienne J (matrice des dérivées partielles)

La quête des *a priori* non-informatifs

Parfois, on a **aucune connaissance *a priori***
⇒ la loi Uniforme, un **a priori non-informatif** ?

2 difficultés majeures :

1. **Lois impropres** $\int_\Theta \pi(\theta)\mathrm{d}\theta = \infty$
2. **Lois non-invariantes**

Autres solutions ?

La loi *a priori* de Jeffreys

⇒ Un a priori **faiblement informatif**, invariant par re-paramétrisation

- *a priori* unidimensionnel de Jeffreys :

  $\pi(\theta) \propto \sqrt{I(\theta)}$ où I est la matrice d'information de Fisher

- *a priori* multidimensionnel de Jeffreys :

$$\pi(\boldsymbol{\theta}) \propto \sqrt{|I(\boldsymbol{\theta})|}$$

En pratique, il est généralement plus facile (et commun) de considérer les paramètres indépendants *a priori*

La loi *a priori* de Jeffreys : application à l'exemple historique

$$f(y|\theta) = \theta^y (1-\theta)^{(1-y)}$$