

Algorithmes MCMC

Définition d'une chaîne de Markov

Chaîne de Markov : processus stochastique à temps discret

Définition : une chaîne de Markov est une suite de variable aléatoire $X_0, X_1, X_2, X_3, \dots$ (toutes définies sur le même espace) possédant la **propriété de Markov** (« sans mémoire ») :

$$p(X_i = x | X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}) = p(X_i = x | X_{i-1} = x_{i-1})$$

L'ensemble E des valeurs possible pour X_i est appelé **espace d'état**

Déterminée par 2 paramètres :

- 1 sa distribution initiale $p(X_0)$
- 2 son noyau de transition $T(x, A) = p(X_i \in A | X_{i-1} = x)$

NB : on ne va considérer ici que des chaînes de Markov **homogènes** :

$$p(X_{i+1} = x | X_i = y) = p(X_i = x | X_{i-1} = y)$$

Propriétés des chaînes de Markov

Propriété : Une chaîne de Markov est dite **irréductible** : si tous les ensembles de probabilité non nulle peuvent être atteints à partir de tout point de départ (i.e. tout état est accessible à partir de n'importe quel autre).

Propriétés des chaînes de Markov

Propriété : Une chaîne de Markov est dite **irréductible** : si tous les ensembles de probabilité non nulle peuvent être atteints à partir de tout point de départ (i.e. tout état est accessible à partir de n'importe quel autre).

Propriété : Une chaîne de Markov est dite **récurrente** si les trajectoires (X_j) passent une infinité de fois dans tout ensemble de probabilité non nulle de l'espace d'état.

Propriétés des chaînes de Markov

Propriété : Une chaîne de Markov est dite **irréductible** : si tous les ensembles de probabilité non nulle peuvent être atteints à partir de tout point de départ (i.e. tout état est accessible à partir de n'importe quel autre).

Propriété : Une chaîne de Markov est dite **récurrente** si les trajectoires (X_j) passent une infinité de fois dans tout ensemble de probabilité non nulle de l'espace d'état.

Propriété : Une chaîne de Markov est dite **apériodique** si rien n'induit un comportement périodique des trajectoires.

Loi stationnaire & théorème ergodique

Définition : Une distribution de probabilité \tilde{p} est appelée **loi invariante** (ou **loi stationnaire**) pour une chaîne de Markov si elle vérifie la propriété suivante :

$$\text{si } X_i \sim \tilde{p}, \text{ alors } X_{i+j} \sim \tilde{p} \quad \forall j \geq 1$$

Remarque : Une chaîne de Markov peut admettre plusieurs lois stationnaires.

Loi stationnaire & théorème ergodique

Définition : Une distribution de probabilité \tilde{p} est appelée **loi invariante** (ou **loi stationnaire**) pour une chaîne de Markov si elle vérifie la propriété suivante :

$$\text{si } X_i \sim \tilde{p}, \text{ alors } X_{i+j} \sim \tilde{p} \quad \forall j \geq 1$$

Remarque : Une chaîne de Markov peut admettre plusieurs lois stationnaires.

Théorème ergodique (espace infini) : Une chaîne de Markov irréductible et récurrente positive (i.e. le temps de retour moyen est fini) admet une unique loi de probabilité invariante \tilde{p} . Si cette chaîne de Markov est de plus apériodique, alors elle converge en loi vers \tilde{p} .

Exemple de chaîne de Markov à espace d'état discret – I

Bébé suit à chaque minute une chaîne de Markov discrète à 3 états :

D dormir

M manger

C changer la couche

⇒ son état dans une minute ne dépend que de son état actuel (et pas des minutes précédentes)

La matrice des probabilité de transition soit alors la suivante :

$$P = \begin{pmatrix} X_i/X_{i+1} & D & M & C \\ D & 0.9 & 0.05 & 0.05 \\ M & 0.7 & 0 & 0.3 \\ C & 0.8 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Exemple de chaîne de Markov à espace d'état discret – I

Bébé suit à chaque minute une chaîne de Markov discrète à 3 états :

D dormir

M manger

C changer la couche

⇒ son état dans une minute ne dépend que de son état actuel (et pas des minutes précédentes)

La matrice des probabilité de transition soit alors la suivante :

$$P = \begin{pmatrix} X_i/X_{i+1} & D & M & C \\ D & 0.9 & 0.05 & 0.05 \\ M & 0.7 & 0 & 0.3 \\ C & 0.8 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}$$

- 1) Selon vous, la chaîne est-elle irréductible ? Récurrente ? Apériodique ?
- 2) Supposons que Bébé dorme. Que fait-il 2 min après ? et 10 min après ?
- 3) Supposons maintenant qu'on lui change la couche. Que fait-il 10 min après ?

Exemple de chaîne de Markov à espace d'état discret – II

- 1) Selon vous, la chaîne est-elle irréductible ? Récurrente ? Apériodique ?
...
- 2) Supposons que Bébé dorme. Que fait-il 2 min après ? et 10 min après ?
...
- 3) Supposons maintenant qu'on lui change la couche. Que fait-il 10 min après ?
...