Méthode par inversion : illustration

Exemple : On veut générer un échantillon suivant la loi exponentielle de paramètre λ

- la densité de la loi exponentielle est $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$
- la fonction de répartition (son intégrale) est donc $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$

Posons $F(x) = u$

On obtient alors $x = \ldots$

Méthode par inversion : illustration

Exemple : On veut générer un échantillon suivant la loi exponentielle de paramètre λ

- la densité de la loi exponentielle est $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$
- la fonction de répartition (son intégrale) est donc $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$

Posons $F(x) = u$

On obtient alors $x = -\dfrac{1}{\lambda}\log(1-u)$

$\Rightarrow$ et si $U \sim \mathcal{U}_{[0;1]}$, alors $X = F^{-1}(U) = -\frac{1}{\lambda}\log(1-U) \sim E(\lambda)$

Méthode d'acceptation-rejet : algorithme

Utiliser une **loi instrumentale** g (dont on sait échantillonner selon la loi)
$\Rightarrow$ afin d'échantillonner selon la loi cible f

Le principe générale est de **choisir** g **proche de** f et de proposer des échantillons selon g, d'en accepter certains et d'en rejeter d'autres afin d'obtenir un échantillon suivant la loi de f.

Méthode d'acceptation-rejet : algorithme

Utiliser une **loi instrumentale** g (dont on sait échantillonner selon la loi)
$\Rightarrow$ afin d'échantillonner selon la loi cible f

Le principe générale est de **choisir** g **proche de** f et de proposer des échantillons selon g, d'en accepter certains et d'en rejeter d'autres afin d'obtenir un échantillon suivant la loi de f.

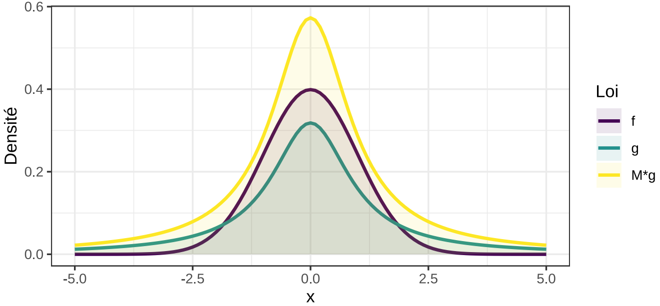
Soit une loi d'intérêt de densité f.

Soit une loi de proposition de densité g (à partir de laquelle on sait échantilloner) telle que, pour tout x : $f(x) \leq Mg(x)$

1. Générer $x_i \sim g$ et $u_i \sim \mathcal{U}_{[0;1]}$
2. Si $u_i \leq \frac{f(x_i)}{Mg(x_i)}$ on **accepte** le tirage :
   $y_i := x_i$
   sinon on le **rejette** et on retourne en 1.

$\Rightarrow$ $(y_1, \ldots, y_n) \overset{iid}{\sim} f$

Acceptation-rejet : importance de la loi de proposition



Exemple de loi de proposition et de loi cible pour l'algorithme d'acceptation-rejet

Remarque : Plus M est petit, plus le taux de rejet est faible
$\Rightarrow$ plus l'algorithme est efficace (moins d'itération pour un échantillon de taille n)

Donc on souhaite g le plus proche possible de f !

⚠ g aura nécessairement des queues plus lourdes que la loi cible
$\Rightarrow$ lorsque le nombre de paramètres augmente, le taux d'acceptation décroit très rapidement *(fléau de la dimension)*

Exercices

Exercice 1 : Construire un pseudo-échantillon de taille n selon la loi discrète suivante (multinomiale à m éléments $\{x_1,\ldots,x_m\}$) :

$$P(X=x) = p_1\delta_{x_1}(x)+p_2\delta_{x_2}(x)+\ldots p_m\delta_{x_m}(x) \quad \text{avec } \sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \text{ et } \delta_a(x) = \mathbb{1}_{\{x=a\}}$$

Exercice 2 : Grâce à la méthode par inversion, générer un pseudo-échantillon de taille suivant une loi de Cauchy (dont la densité est $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$), sachant que $\arctan'(x) = \frac{1}{(1+x^2)}$ et $\lim_{x\to-\infty} arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$.

Exercice 3 : Écrire un algorithme d'acceptation-rejet pour simuler la réalisation d'un pseudo-échantillon de taille n d'une loi normale $N(0,1)$ en utilisant une loi de Cauchy comme proposition. Trouvez la valeur de M optimale.