# Théorème de Bayes : exercice

1% de la population est affecté par une maladie rare. Un test médical pour cette maladie possède les propriétés suivantes :

- si quelqu'un a cette maladie, son test sera positif dans 99% des cas
- si quelqu'un n'a pas cette maladie, son test sera négatif dans 95% des cas

*Sachant que quelqu'un a eu un resultat positif au test, quelle est la probabilité qu'il ait la maladie ?*

$$\Pr(M=+)=0.01 \qquad \Pr(T=+|M=+)=0.99 \qquad \Pr(T=-|M=-)=0.95$$

$$\Pr(M=+|T=+) \quad = ?$$

# Théorème de Bayes : exercice

1% de la population est affecté par une maladie rare. Un test médical pour cette maladie possède les propriétés suivantes :

- si quelqu'un a cette maladie, son test sera positif dans 99% des cas
- si quelqu'un n'a pas cette maladie, son test sera négatif dans 95% des cas

*Sachant que quelqu'un a eu un resultat positif au test, quelle est la probabilité qu'il ait la maladie ?*

$$\mathrm{Pr}(M=+)=0.01 \qquad \mathrm{Pr}(T=+|M=+)=0.99 \qquad \mathrm{Pr}(T=-|M=-)=0.95$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Pr}(M=+|T=+) &= \frac{\mathrm{Pr}(T=+|M=+)\mathrm{Pr}(M=+)}{\mathrm{Pr}(T=+)} \\
&= \frac{\mathrm{Pr}(T=+|M=+)\mathrm{Pr}(M=+)}{\mathrm{Pr}(T=+|M=+)\mathrm{Pr}(M=+)+\mathrm{Pr}(T=+|M=-)\mathrm{Pr}(M=-)} \\
&= \frac{\mathrm{Pr}(T=+|M=+)\mathrm{Pr}(M=+)}{\mathrm{Pr}(T=+|M=+)\mathrm{Pr}(M=+)+(1-\mathrm{Pr}(T=-|M=-))(1-\mathrm{Pr}(M=+))} \\
&= 0.17
\end{aligned}$$

# Théorème de Bayes continu

- $f(y|\theta)$ : modèle (probabiliste) paramétrique
- $\theta$ : paramètres
- $\pi$ : distribution de probabilité

Théorème de Bayes continu :

$$p(\theta|y) = \frac{f(y|\theta)\pi(\theta)}{\int f(y|\theta)\pi(\theta)\,\mathrm{d}\theta}$$

# Théorème de Bayes continu

- $f(y|\theta)$ : modèle (probabiliste) paramétrique
- $\theta$ : paramètres
- $\pi$ : distribution de probabilité

Théorème de Bayes continu :

$$p(\theta|y) = \frac{f(y|\theta)\pi(\theta)}{\int f(y|\theta)\pi(\theta)\,\mathrm{d}\theta}$$

Pierre-Simon de Laplace !

# Philosophie bayésienne

Les **Paramètres sont des variables aléatoires !** – *pas de "vraie" valeur*

⇒ induit une distribution de probabilité marginale $\pi(\theta)$ sur les paramètres : la distribution ***a priori***

😁 permet de **formaliser** les hypothèses dans la modélisation

☹️ introduit nécessairement de la **subjectivité** dans l'analyse

# Bayésiens vs. Fréquentistes : point historique

1. **Bayes** + **Laplace** ⇒ développement de la Statistique aux **XVIII-XIX$^{e}$ siècles**

2. Galton & Pearson, puis Fisher & Neymann ⇒ théorie **fréquentiste** devenue dominante au cours du **XX$^{e}$ siècle**

3. au tournant du **XXI$^{e}$ siècle** : avènement de l'ordinateur moderne ⇒ ***comeback* du bayésien**

# Bayésiens vs. Fréquentistes : un débat dépassé

Fisher rejetait fermement le raisonnement bayésien

$\Rightarrow$ communauté divisée en 2 au XX$^{e}$ siècle

# Bayésiens vs. Fréquentistes : un débat dépassé

Fisher rejetait fermement le raisonnement bayésien

$\Rightarrow$ communauté divisée en 2 au XX$^{\text{e}}$ siècle

*Être ou ne pas être bayésien, là n'est plus la question : il s'agit d'utiliser à bon escient les outils adaptés quand cela est necessaire*

Gilbert Saporta