Inférence bayésienne

Inférence bayésienne

Modélisation bayésienne ⇒ distribution *a posteriori* :

- ensemble de l'information sur θ, **conditionnellement au modèle et aux données**

Inférence bayésienne

Modélisation bayésienne $\Rightarrow$ distribution *a posteriori* :

- ensemble de l'information sur θ, **conditionnellement au modèle et aux données**

Résumé de cette distribution ?

- centre
- incertitude
- ...

Théorie de la décision

Contexte : estimation d'un paramètre inconnu θ

Décision : choix d'un estimateur ponctuel $\widehat{\theta}$ « optimal »

fonction de coût : représente la pénalité associée au choix d'un $\widehat{\theta}$ particulier

Pour choisir le $\widehat{\theta}$ optimal, on minimise la fonction de coût choisie

un grand nombre de fonctions de coût différentes sont possibles : chacune d'entre elle résulte en un estimateur ponctuel optimal différent

Estimateurs ponctuels

- **Espérance *a posteriori* :** $\mu_P = \mathbb{E}(\theta|\boldsymbol{y}) = \mathbb{E}_{\theta|\boldsymbol{y}}(\theta)$

  pas toujours facile car nécessite le calcul d'une intégrale...

  $\Rightarrow$ minimise le coût quadratique

Estimateurs ponctuels

- **Espérance *a posteriori* :** $\mu_P = \mathbb{E}(\theta|\boldsymbol{y}) = \mathbb{E}_{\theta|\boldsymbol{y}}(\theta)$

  pas toujours facile car nécessite le calcul d'une intégrale...

  $\Rightarrow$ minimise le coût quadratique

- **Maximum *A Posteriori* (MAP) :**
  plus facile à calculer : une simple maximisation de $f(\boldsymbol{y}|\theta)\pi(\theta)$

Estimateurs ponctuels

- **Espérance *a posteriori* :** $\mu_P = \mathbb{E}(\theta|\boldsymbol{y}) = \mathbb{E}_{\theta|\boldsymbol{y}}(\theta)$

  pas toujours facile car nécessite le calcul d'une intégrale...

  $\Rightarrow$ minimise le coût quadratique

- **Maximum *A Posteriori* (MAP) :**
  plus facile à calculer : une simple maximisation de $f(\boldsymbol{y}|\theta)\pi(\theta)$

- **Median *a posteriori* :** la médiane de $p(\theta|(\boldsymbol{y}))$

Estimateurs ponctuels

- **Espérance *a posteriori* :** $\mu_P = \mathbb{E}(\theta|\boldsymbol{y}) = \mathbb{E}_{\theta|\boldsymbol{y}}(\theta)$

  pas toujours facile car nécessite le calcul d'une intégrale...

  $\Rightarrow$ minimise le coût quadratique

- **Maximum *A Posteriori* (MAP) :**
  plus facile à calculer : une simple maximisation de $f(\boldsymbol{y}|\theta)\pi(\theta)$

- **Median *a posteriori* :** la médiane de $p(\theta|(y))$

⚠ L'approche bayésienne fournit, au delà de l'estimation ponctuelle, une caractérisation complète de la distribution *a posteriori*

MAP sur l'exemple historique

Calcul du Maximum *A Posteriori* dans l'exemple historique des naissances féminines à Paris avec un *a priori* uniforme :

$$p(\theta|\mathbf{y}) = \binom{n}{S}(n+1)\theta^S(1-\theta)^{n-S}$$

avec $n = 493\ 472$ et $S = 241\ 945$

$\widehat{\theta}_{MAP} = \ldots$